有限T_0-位相空間の位相生成行列とオイラー数(特異点論とオーミニマルカテゴリー)

牛瀧, 文宏

数理解析研究所講究録
第 1540 巻 2007 年 29-34

有限T_0-位相空間の位相生成行列とオイラー数

京都産業大学理学部　牛瀧文宏 (Fumihiro Ushitaki)
Faculty of Science, Kyoto Sangyo University

1 序

この小論を通じて、A_n を n 点集合とする。特に断らない限り、$A_n=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ とする。この集合に位相をいれたものを n **点空間**という。一般に有限個数の点からなる位相空間を**有限位相空間**という。特に、T_0-分離公理を満たす有限位相空間を**有限 T_0-位相空間**または簡単に**有限 T_0-空間**という。位相が $\mathcal{T}$ である n 点空間を $(A_n,\mathcal{T})$ と表すが、記号の簡略のため、これを $X_n=(A_n,\mathcal{T})$ と表す。また、集合の点の個数を特に問題としない場合には、有限点集合 A の上に位相 $\mathcal{T}$ をいれるとき、この位相空間を $X=(A,\mathcal{T})$ と表す。

有限位相空間はホモトピーの意味で「自明な」空間ではない。有限位相空間の位相幾何学的性質が M. C. McCord により研究された。それによると、任意の有限位相空間に対し、それと弱ホモトピー同値な有限単体的複体が存在し、逆に任意の有限単体的複体に対し、それと弱ホモトピー同値な有限位相空間が存在する ([2])。有限位相空間に関して知られている位相的な性質に関しては、[1] に纏められている。

さて、有限位相空間 X_n に対して、行列 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ を

$$b_{ij}=\begin{cases}1 & (\text{if } x_j\in U_i)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases} \tag{1}$$

で定義するとき、これを X_n の**位相生成行列**という。ここで、U_i は x_i を含む最小の開集合を表す。位相生成行列はもとの有限位相空間の位相を完全に決定するものである。また、H.Sharp Jr により、成分が 0 および 1 からなる行列 B が、ある有限位相空間の位相生成行列となるための必要十分条件が、その対角成分はすべて 1 であり、かつブール行列の演算に関して $B^2=B$ をみたすことであることが示されている ([3])。

n 次正方行列 A に対して、その全ての成分の和を $s(A)$ と表すことにする。この小論では、上述のような位相幾何学的性質に関連して、有限 T_0-位相空間のオイラー数と位相生成行列の間の関係を明らかにすることが目的である。我々の結果は次のものである。

Theorem . X_n を n 点 T_0-空間、B をその位相生成行列、E を n-次単位行列とする。今

$$\alpha_q = s((B-E)^q) \quad (0 \leqq q \leqq n-1) \tag{2}$$

とおけば、X_n のオイラー数に関して、

$$\chi(X_n) = \sum_{q=0}^{n-1}(-1)^q \alpha_q \tag{3}$$

が成り立つ。ただし、$(B-E)^0$ は単位行列を定め、行列の演算は通常のものとする。

本稿の残りの部分は 2 つの節からなる。すなわち、第 2 節では我々の定理の証明を行い、第 3 節でその例を与えるという形である。

2 Theorem の証明

この節では我々の定理の証明を与える。成分が 0 と 1 だけからなり、しかもどの行にもどの列にも 1 が一つずつ含まれる行列を置換行列という。有限 T_0-空間の位相生成行列に関して、H.Sharp Jr により、次が示されている。

Proposition 2.1 ([3]). X_n を有限位相空間とし、その位相生成行列を B とする。このとき、次は同値である。

(1) X_n は T_0-空間である。

(2) B は置換行列により、三角行列と相似である。すなわち、

$$\exists P : \text{置換行列} \quad \textit{such that} \quad {}^tPBP \text{ が三角行列。} \tag{4}$$

有限 T_0-空間の位相生成行列に関して、さらに次が成り立つ。

Lemma 2.2. X_n を有限 T_0-空間、B をその位相生成行列とすると、$B-E$ はべき零行列である。ただし、行列の演算は通常のものとする。

Proof. Proposition 2.1 より、置換行列 P に対して ${}^tPBP$ が三角行列であるとする。この三角行列の成分は 0 と 1 からなり、対角成分はすべて 1 である。従って、${}^tPBP - E = {}^tP(B-E)P$ はべき零行列である。特に、$({}^tP(B-E)P)^n = O$ である。よって、$B-E$ もべき零行列である。 □

有限位相空間 X_n において、関係「$\leqq$」を次のように定義する。ただし、U_i は点 x_i を含む最小の開集合である。

$$U_i \subset U_j \Longrightarrow x_i \leqq x_j \tag{5}$$

これはもちろん、

$$x_i \in U_j \Longrightarrow x_i \leqq x_j \tag{6}$$

と言い換えてもいい。このような関係を定義するとき、次が容易に示される。

Lemma 2.3. 上の *(5)* または *(6)* で定義した関係「≦」が有限位相空間 X_n 上の順序関係を与えるための必要十分条件は X_n が T_0-空間であることである。

続いて T_0-空間から単体的複体の間の弱ホモトピー同値を構成した McCord の結果 ([2]) を紹介する。

Proposition 2.4 (McCord [2]). 有限 T_0-空間 X に対して、単体的複体 $\mathfrak{K}(X)$ を次で定義する。

$\mathfrak{K}(X)$ の頂点： X の点。

$\mathfrak{K}(X)$ の単体： X の全順序部分集合。ただし、順序は *Lemma 2.3* のものとする。

さらに写像 $f_X : |\mathfrak{K}(X)| \to X$ を $|\mathfrak{K}(X)|$ の中の点 u に対して、それを含むただ一つの開単体

$$(x_{i_0}, x_{i_1}, \dots . x_{i_r}) \quad (\text{但し、} x_{i_0} < x_{i_1} < \cdots < x_{i_r})$$

を考えたときの、最小限 x_{i_0} を対応させるものと定義する。

このとき、次が成り立つ。

(1) 写像 $f_X : |\mathfrak{K}(X)| \to X$ は弱ホモトピー同値写像である。

(2) 有限 T_0-空間の間の任意の連続写像 $\varphi : X \to Y$ が引き起こす写像

$$\varphi_* : \mathfrak{K}(X) \to \mathfrak{K}(Y)$$

は単体写像で、このとき、次の図式が可換になる。

$$\begin{array}{ccc} |\mathfrak{K}(X)| & \xrightarrow{|\varphi_*|} & |\mathfrak{K}(Y)| \\ {\scriptstyle f_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_Y} \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

$\mathfrak{K}(X)$ を抽象的単体的複体とみた場合、Proposition2.4 より、$\mathfrak{K}(X)$ と X の全順序部分集合全体は一対一に対応することに注意する。以上を受けて我々の定理を証明する。

Proof of Theorem. Proposition 2.4 を用いて、有限 T_0-空間 X に対して $\mathfrak{K}(X)$ を考え、そのオイラー数を計算するという方法をとる。

まず、$\alpha_0 = s(E) = n$ なので、これは $\mathfrak{K}(X)$ の頂点の個数と一致する。

行列 $B - E$ において、$b_{ij} = 1$ ということは、$x_i \geqq x_j$ であることと同値である。従って、x_i と x_j は $\mathfrak{K}(X)$ の 1 単体の 2 つの頂点となる。またこのとき、X が T_0-空間であるという仮定より、$b_{ij} = 0$ である。従って、$B - E$ における成分 1 の個数、すなわち α_1 は $\mathfrak{K}(X)$ の 1 単体の個数と一致する。

グラフ理論の随伴行列の考え方より、行列 $(B-E)^q$ の (i,j) 成分が k であるということは、$x_i = x_{i_1}, x_j = x_{i_q}$ で $x_{i_1} \lneqq x_{i_2} \lneqq \cdots \lneqq x_{i_q}$ となるような異なる列 $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_q})$ が丁度 k 個存在するということに他ならない。よって、$(B-E)^q$ のすべての成分について考えると、長さ q の全順序部分集合が $s((B-E)^q) = \alpha_q$ 個存在することがわかる。これらは、$\mathfrak{K}(X)$ の q-単体と一対一に対応する。また、$q \geqq n$ の時は、Lemma 2.2 により、$(B-E)^q = 0$ である。X と $|\mathfrak{K}(X)|$ は弱ホモトピー同値であるから、単体的複体 $\mathfrak{K}(X)$ に対して、オイラー・ポアンカレの公式を使うことで、求める結果を得る。

3 いろいろな計算例

Example 3.1.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

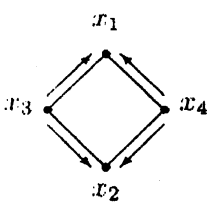
とおくと、対角成分がすべて 1 であって、ブール行列の積に関して、$B^2 = B$ を満たすので、B は位相生成行列である。また、三角行列であるから Proposition 2.1 より、4 点集合 A_4 上の T_0-位相を定める。この位相をいれた空間を X_4 とする。X_4 の全順序部分集合は

$$\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_4\}, \{x_2, x_3\}, \{x_2, x_4\},$$

であるから、$\mathfrak{K}(X_4)$ を構成する単体の集合は

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, (x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_2, x_3), (x_2, x_4)\}$$

である。従って、$|\mathfrak{K}(X_4)| \approx S^1$ がなりたつ。写像 f_X は $|\mathfrak{K}(X_4)|$ の頂点を X_4 の同じ点に移し、$|(x_1, x_3)|$ や $|(x_1, x_4)|$ の内点を x_1 に、$|(x_2, x_3)|$ や $|(x_2, x_4)|$ の内点を x_2 に移す。$|\mathfrak{K}(X_4)|$ と $f_X : |\mathfrak{K}(X)| \to X$ の様子を図示すると次のようになる。



行列 B に対して、

$$B - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (B-E)^2 = O$$

であるから、

$$\alpha_0 = 4, \quad \alpha_1 = 4, \quad \alpha_2 = 0,$$

でそのオイラー数は

$$\chi(X_4) = 4 - 4 + 0 = 0$$

である。

Example 3.2. n 単体の全ての辺単体を集めて出来る単体的複体を Δ^n とする。

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

を位相生成行列として持つ有限 T_0-空間を X_6 とおくと、$\mathfrak{K}(X_6) = \Delta^5$ である。この行列に対して、

$$B - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (B - E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(B - E)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (B - E)^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(B - E)^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (B - E)^6 = O$$

であるから、

$$\alpha_0 = 6, \quad \alpha_1 = 15, \quad \alpha_2 = 20, \quad \alpha_3 = 15, \quad \alpha_4 = 6, \quad \alpha_5 = 1, \quad \alpha_6 = 0$$

でそのオイラー数は

$$\chi = 6 - 15 + 20 - 15 + 6 - 1 + 0 = 1$$

である。

Example 3.3. 続いて、

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を位相生成行列とするような有限位相空間 X_6 について考える。X_6 は二次元球面 S^2 と弱ホモトピー同値である。

$$B - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (B-E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (B-E)^3 = O$$

であるから、

$$\alpha_0 = 6, \quad \alpha_1 = 12, \quad \alpha_2 = 8, \quad \alpha_3 = 0$$

でそのオイラー数は

$$\chi = 6 - 12 + 8 - 0 = 2$$

である。

参考文献

[1] Kono, S. and Ushitaki, F., *Geometry of finite topological sapces and equivariant finite topological spaces*, in: Current Trends in Transformation Groups, ed. A. Bak, M. Morimoto and F.Ushitaki, pp. 53–63, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht ,2002

[2] M. C. McCord, *Singular homotopy groups and homotopy groups of finite topological spaces*, Duke. Math. J. **33** (1966), 465–474.

[3] H. Sharp Jr., *Quasi-orderings and topologies on finite sets*, Proc. Amer. Math. Soc. **17** (1966), 1344–1349.